

# Prouver l'optimum avec une heuristique ?

Alexandre Gondran, Laurent Moalic

► **To cite this version:**

Alexandre Gondran, Laurent Moalic. Prouver l'optimum avec une heuristique?. ROADEF 2018, 19ème congrès de la société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Feb 2018, Lorient, France. hal-01737195

**HAL Id: hal-01737195**

**<https://hal-enac.archives-ouvertes.fr/hal-01737195>**

Submitted on 19 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Prouver l'optimum avec une heuristique ?

Alexandre Gondran<sup>1</sup>, Laurent Moalic<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ÉNAC, École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France

`alexandre.gondran@enac.fr`

<sup>2</sup> Université de Haute-Alsace, LMIA, Mulhouse, France

`laurent.moalic@uha.fr`

**Mots-clés :** *coloration de graphe, optimalité, métaheuristiques, preuve*

## 1 Introduction

Le principal inconvénient d'une heuristique est ne pas garantir l'optimalité des solutions trouvées, ni même la distance à la valeur optimale (excepté pour les algorithmes d'approximation). Doit-on se résoudre à ne trouver que de *bonnes solutions* pour les problèmes NP-difficiles de grande taille ? Nous proposons dans ce papier un nouveau type d'optimalité basé sur le comptage de solutions. Cette optimalité est nommée *optimalité faible* ou *optimalité expérimentale* en ce sens qu'elle repose sur un estimateur du nombre de solutions admissibles pour une certaine valeur de la fonction objectif.

Cette démarche peut s'appliquer à de nombreux problèmes dès lors que le nombre de solutions admissibles décroît exponentiellement avec la valeur de la fonction objectif (dans le cas d'une minimisation). C'est le cas pour de nombreux problèmes, et particulièrement pour le problème de coloration de graphe sur lequel nous avons réalisé de nombreux tests.

## 2 Application à la coloration de graphe

La coloration du graphe  $G$  consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de telle manière que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes. Soit un entier positif  $k$ , on appelle  $k$ -coloration de  $G$ , une coloration utilisant  $k$  couleurs.  $\chi(G)$ , le nombre chromatique de  $G$ , est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier  $G$ . Trouver  $\chi(G)$  est un problème NP-difficile.

Alors que des méthodes exactes ont été développées pour résoudre des problèmes de petite taille, seules des approches heuristiques permettent actuellement de résoudre le problème de coloration de graphes avec un nombre de sommets plus important, sans garantie d'optimalité toutefois. En particulier l'hybridation d'heuristiques, tel que les approches mémétiques [1, 2, 5], et notamment à population réduite [4, 3], atteignent des niveaux de performance inenvisageable avec des approches exactes.

On note  $\mathcal{N}(G, k)$  le nombre de  $k$ -coloration différentes de  $G$  et  $i(G)$  le nombre de stable (ou "independant set", c-à-d un ensemble de sommets deux à deux non adjacents) de  $G$ . Notre travail est fondé sur la constatation suivante :

**Théorème 1** *Si  $i(G) > \mathcal{N}(G, k) > 0$ , alors  $\chi(G) = k$ .*

Il suffit donc de trouver un majorant de  $\mathcal{N}(G, k)$  qui soit plus petit que  $i(G)$  pour prouver l'optimalité. Nous construisons un estimateur de  $\mathcal{N}(G, k)$  à partir d'un échantillon de  $k$ -colorations trouvées à l'aide de notre algorithme mémétique HEAD [4]. Cette estimateur se base sur la méthode de capture-marquage-recapture communément utilisée pour estimer la taille d'une population d'animaux.

### 3 Tests et analyses

Notre approche est testée sur les benchmarks DIMACS (plus de 100 graphes) et RCBII (plus de 2000 graphes de densité et taille variées). Notre approche ne s'applique que si le nombre de solutions optimales n'est pas trop élevée ( $<100000$ ). Dans ce cas, l'optimalité expérimentale est conforme à l'optimalité usuelle pour les graphes dont  $\chi(G)$  est connu. Pour de nombreux graphes dont  $\chi(G)$  est encore inconnu, l'optimalité expérimentale est démontrée. Sans bien sûr être équivalent à l'optimalité usuelle, notre démarche fournit des arguments supplémentaires de gage d'être à l'optimum.

### 4 Conclusions et perspectives

On évalue habituellement la robustesse d'une heuristique en indiquant le nombre de *runs* couronnés de succès (c-à-d ayant trouvé la meilleure valeur de la fonction objectif) sur le nombre de *runs* total. Dans notre étude, en étudiant le nombre de fois qu'une même solution est trouvée, on indique une certaine confiance d'avoir trouvé l'optimum. Les limites et pièges de cette approche (non ergodicité de notre algorithme, échantillonnage non-uniforme...) seront également présentées.

### Références

- [1] Philippe Galinier and Jin-Kao Hao. Hybrid evolutionary algorithms for graph coloring. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3(4) :379–397, 1999.
- [2] Zhipeng Lü and Jin-Kao Hao. A memetic algorithm for graph coloring. *European Journal of Operational Research*, 203(1) :241–250, 2010.
- [3] Laurent Moalic and Alexandre Gondran. Heuristic rope team : A parallel algorithm for graph coloring. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO '17*, pages 314–320, New York, NY, USA, 2017. ACM.
- [4] Laurent Moalic and Alexandre Gondran. Variations on memetic algorithms for graph coloring problems. *Journal of Heuristics*, Aug 2017.
- [5] Qinghua Wu and Jin-Kao Hao. Coloring large graphs based on independent set extraction. *Computers & Operations Research*, 39(2) :283–290, 2012.

# MER3-H - Salle des Epices

## Problèmes de placement et de packing

16:40-18:00 - Chairman : Mhand Hifi

---

<b>P 030</b>	Consistent Neighbourhood Search for Two-Dimensional Vector Packing <i>Michel Vasquez et Mirsad Buljbasic</i>
<b>P 187</b>	Résolution parallèle du problème de placement/chargement en trois-dimensions <i>Hifi Mhand et Saadi Toufik</i>
<b>P 216</b>	Une méthode hybride pour le problème de placement de sphères non-identiques <i>Mhand Hifi et Labib Yousef</i>
<b>P 220</b>	Une heuristique à voisinage large pour le placement de sphères dans un container <i>Mhand Hifi et Labib Yousef</i>

---