

Borne Inférieure pour la Somme Coloration de Graphe via la Relaxation vers un Problème de Partition d'Entier

Alexandre Gondran¹ Vincent Duchamp¹ Laurent Moalic²

¹ *ÉNAC, École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France*
alexandre.gondran@enac.fr, vincent.duchamp@alumni.enac.fr

² *IRIMAS, Université de Haute Alsace, Mulhouse, France*
laurent.moalic@uha.fr

1 Le problème de somme coloration de graphe

Soit un graphe non orienté $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ l'ensemble des sommets et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arêtes. Pour un entier $k > 0$, une k -coloration légale de G est l'affectation à chacun des sommets du graphe d'une des k couleurs, de telle sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente. Le problème de coloration de graphes (GCP) consiste à trouver une k -coloration légale, avec le plus petit nombre de couleur k possible, appelé nombre chromatique $\chi(G)$.

Une des variantes du GCP est le problème de somme coloration minimale [1] (MSCP). Chaque couleur est représentée par un entier de 1 à k qui correspond au poids de la couleur. Le MSCP consiste à trouver une k -coloration légale qui minimise non pas le nombre k de couleurs utilisées mais la somme des poids des couleurs assignées aux sommets. La valeur minimale est appelée la somme chromatique, notée $\Sigma(G)$. Ce problème, pour un graphe quelconque, est NP-difficile [1]. De nombreuses approches exactes et heuristiques ont été développées au cours des dernières décennies pour trouver une borne inférieure à $\Sigma(G)$. Les approches les plus efficaces connues actuellement reposent sur la notion de motif [2] d'autres sur le recouvrement du graphe en cliques [3].

2 Relaxation en un problème de partition d'entier

On montre que pour un graphe $G = (V, E)$ avec $n = |V|$ et connaissant $\bar{\alpha}$, une borne sup du nombre stable (i.e. taille du plus grand stable du graphe), \underline{s} , une borne inférieure de sa force chromatique (i.e. nombre minimal de couleur utilisée pour une somme coloration optimale) et m , une borne sup du nombre maximal de classes de couleur de taille $\bar{\alpha}$, le problème suivant de partition de l'entier n , dénommé $(IPP_{\Sigma M})$ est une relaxation de (MSCP) :

$$(IPP_{\Sigma M}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min.} & f_{\Sigma M}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n i a_i \quad (1) \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n a_i = n \quad (2) \\ & a_i \geq a_{i+1}, \quad \forall i = 1..n-1 \quad (3) \\ & a_i \leq \bar{\alpha}, \quad \forall i = 1..n \quad (4) \\ & |\{a_i | a_i = \bar{\alpha}\}| \leq m \quad (5) \\ & a_{\underline{s}} \geq 1 \quad (6) \\ & \mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n \quad (7) \end{array} \right.$$

Via la résolution exacte de cette relaxation, on trouve une borne inférieure de $\Sigma(G)$. Le problème de partition d'un entier n est souvent représenté par les diagrammes de Young (ou de Ferrers) comme l'illustre la figure 1.

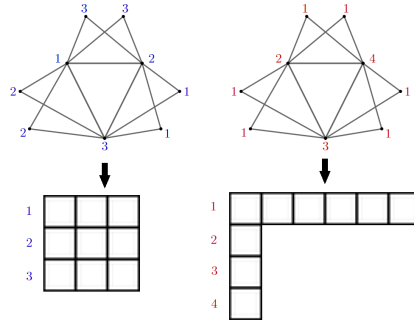


FIG. 1 – Diagrammes de Young de deux colorations du même graphe. Chaque carré représente un sommet. La même couleur a été affectée aux carrés de la même ligne. La valeur de la fonction objectif de MSCP est calculée en comptant le nombre a_i de carrés de chaque ligne i : $\sum_{i=1}^n ia_i$. La coloration de gauche utilise seulement 3 couleurs mais sa somme coloration est de 18, tandis que le coloration de droite utilise 4 couleurs pour une somme coloration égale à 15.

Le tableau 1 présente un aperçu des résultats où nous améliorons les meilleurs bornes inf connus à ce jour. De plus, nous prouvons l’optimalité pour 4 graphes (avec une étoile dans le tableau). On montre également que la méthode utilisée peut être appliquée pour trouver rapidement un borne inférieure à $\chi(G)$.

TAB. 1 – Résultats de notre approche (ΣM) pour quelques graphes du benchmark DIMACS.

Instances	n	d	$\alpha(G)$	$\#is$	m	$\chi(G)$	$\Sigma(G)$	$LB\Sigma_{old}[2]$	ΣM
queen6.6	36	0.46	6	4	4	7	?	127	129
queen8.8	64	0.36	8	92	6	9	291*	289	291
queen9.9	81	0.33	9	352	7	10	?	406	408
queen10.10	100	0.30	10	724	8	11	553*	551	553
3-Insertions_3	56	0.07	27	1	1	4	?	88	89
DSJC125.1	125	0.1	34	747	1	5	?	297	300
DSJC125.5	125	0.5	10	2	2	17	?	855	912
DSJC125.9	125	0.9	4	9	5	44	?	2 124	2 487
DSJC250.5	250	0.5	12	2	2	[[26, 28]]	?	2 745	2 930
DSJC250.9	250	0.9	5	3	2	72	?	6 678	7 882
DSJC500.5	500	0.5	13	51	9	[[43, 47]]	?	9 877	10 339
DSJC500.9	500	0.9	5	23	15	[[123, 126]]	?	25 581	29 768
DSJC1000.5	1000	0.5	15	12	6	[[73, 82]]	?	33 856	35 808
DSJC1000.9	1000	0.9	6	3	3	[[216, 222]]	?	85 294	100 078
flat300_26_0	300	0.48	12	31	14	26	3 966*	3 901	3 966
flat300_28_0	300	0.48	12	45	6	28	?	3 906	4 099
flat1000_60_0	1000	0.49	17	42	40	60	30 100*	29 914	30 100
flat1000_76_0	1000	0.49	15	21	8	76	?	33 880	35 693

Références

- [1] E. Kubicka and A. J. Schwenk, “An introduction to chromatic sums,” in *Proceedings of the 17th Conference on ACM Annual Computer Science Conference*, ser. CSC ’89. New York, NY, USA : ACM, 1989, pp. 39–45.
- [2] C. Lecat, C. Lucet, and C.-M. Li, “New Lower Bound for the Minimum Sum Coloring Problem.” in *AAAI*, 2017, pp. 853–859.
- [3] Y. Jin, J.-P. Hamiez, and J.-K. Hao, “Algorithms for the minimum sum coloring problem : a review,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 47, no. 3, pp. 367–394, Mar 2017. [Online]. Available : <https://doi.org/10.1007/s10462-016-9485-7>