



**HAL**  
open science

# Borne Inférieure pour la Somme Coloration de Graphe via la Relaxation vers un Problème de Partition d'Entier

Alexandre Gondran, Vincent Duchamp, Laurent Moalic

► **To cite this version:**

Alexandre Gondran, Vincent Duchamp, Laurent Moalic. Borne Inférieure pour la Somme Coloration de Graphe via la Relaxation vers un Problème de Partition d'Entier. ROADEF 2019, 20ème congrès annuel de la société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Feb 2019, Le Havre, France. hal-02050030

**HAL Id: hal-02050030**

**<https://hal-enac.archives-ouvertes.fr/hal-02050030>**

Submitted on 26 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Borne Inférieure pour la Somme Coloration de Graphe via la Relaxation vers un Problème de Partition d'Entier

Alexandre Gondran<sup>1</sup>      Vincent Duchamp<sup>1</sup>      Laurent Moalic<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *ÉNAC, École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France*  
alexandre.gondran@enac.fr, vincent.duchamp@alumni.enac.fr

<sup>2</sup> *IRIMAS, Université de Haute Alsace, Mulhouse, France*  
laurent.moalic@uha.fr

## 1 Le problème de somme coloration de graphe

Soit un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , avec  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  l'ensemble des sommets et  $E \subset V \times V$  l'ensemble des arêtes. Pour un entier  $k > 0$ , une  $k$ -coloration légale de  $G$  est l'affectation à chacun des sommets du graphe d'une des  $k$  couleurs, de telle sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente. Le problème de coloration de graphes (GCP) consiste à trouver une  $k$ -coloration légale, avec le plus petit nombre de couleur  $k$  possible, appelé nombre chromatique  $\chi(G)$ .

Une des variantes du GCP est le problème de somme coloration minimale [1] (MSCP). Chaque couleur est représentée par un entier de 1 à  $k$  qui correspond au poids de la couleur. Le MSCP consiste à trouver une  $k$ -coloration légale qui minimise non pas le nombre  $k$  de couleurs utilisées mais la somme des poids des couleurs assignées aux sommets. La valeur minimale est appelée la somme chromatique, notée  $\Sigma(G)$ . Ce problème, pour un graphe quelconque, est NP-difficile [1]. De nombreuses approches exactes et heuristiques ont été développées au cours des dernières décennies pour trouver une borne inférieure à  $\Sigma(G)$ . Les approches les plus efficaces connues actuellement reposent sur la notion de motif [2] d'autres sur le recouvrement du graphe en cliques [3].

## 2 Relaxation en un problème de partition d'entier

On montre que pour un graphe  $G = (V, E)$  avec  $n = |V|$  et connaissant  $\bar{\alpha}$ , une borne sup du nombre stable (i.e. taille du plus grand stable du graphe),  $\underline{s}$ , une borne inférieure de sa force chromatique (i.e. nombre minimal de couleur utilisée pour une somme coloration optimale) et  $m$ , une borne sup du nombre maximal de classes de couleur de taille  $\bar{\alpha}$ , le problème suivant de partition de l'entier  $n$ , dénommé  $(IPP_{\Sigma M})$  est une relaxation de (MSCP) :

$$(IPP_{\Sigma M}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min.} & f_{\Sigma M}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n i a_i \quad (1) \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n a_i = n \quad (2) \\ & a_i \geq a_{i+1}, \quad \forall i = 1..n-1 \quad (3) \\ & a_i \leq \bar{\alpha}, \quad \forall i = 1..n \quad (4) \\ & |\{a_i | a_i = \bar{\alpha}\}| \leq m \quad (5) \\ & a_{\underline{s}} \geq 1 \quad (6) \\ & \mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n \quad (7) \end{array} \right.$$

Via la résolution exacte de cette relaxation, on trouve une borne inférieure de  $\Sigma(G)$ . Le problème de partition d'un entier  $n$  est souvent représenté par les diagrammes de Young (ou de Ferrers) comme l'illustre la figure 1.

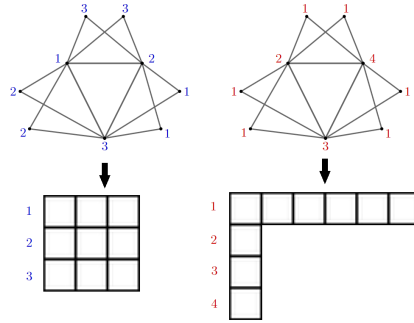


FIG. 1 – Diagrammes de Young de deux colorations du même graphe. Chaque carré représente un sommet. La même couleur a été affectée aux carrés de la même ligne. La valeur de la fonction objectif de MSCP est calculée en comptant le nombre  $a_i$  de carrés de chaque ligne  $i$  :  $\sum_{i=1}^n ia_i$ . La coloration de gauche utilise seulement 3 couleurs mais sa somme coloration est de 18, tandis que le coloration de droite utilise 4 couleurs pour une somme coloration égale à 15.

Le tableau 1 présente un aperçu des résultats où nous améliorons les meilleurs bornes inf connus à ce jour. De plus, nous prouvons l’optimalité pour 4 graphes (avec une étoile dans le tableau). On montre également que la méthode utilisée peut être appliquée pour trouver rapidement un borne inférieure à  $\chi(G)$ .

TAB. 1 – Résultats de notre approche ( $\Sigma M$ ) pour quelques graphes du benchmark DIMACS.

Instances	$n$	$d$	$\alpha(G)$	$\#is$	$m$	$\chi(G)$	$\Sigma(G)$	$LB\Sigma_{old}[2]$	$\Sigma M$
queen6.6	36	0.46	6	4	4	7	?	127	<b>129</b>
queen8.8	64	0.36	8	92	6	9	<b>291*</b>	289	<b>291</b>
queen9.9	81	0.33	9	352	7	10	?	406	<b>408</b>
queen10.10	100	0.30	10	724	8	11	<b>553*</b>	551	<b>553</b>
3-Insertions_3	56	0.07	27	1	1	4	?	88	<b>89</b>
DSJC125.1	125	0.1	34	747	1	5	?	297	<b>300</b>
DSJC125.5	125	0.5	10	2	2	17	?	855	<b>912</b>
DSJC125.9	125	0.9	4	9	5	44	?	2 124	<b>2 487</b>
DSJC250.5	250	0.5	12	2	2	[[26, 28]]	?	2 745	<b>2 930</b>
DSJC250.9	250	0.9	5	3	2	72	?	6 678	<b>7 882</b>
DSJC500.5	500	0.5	13	51	9	[[43, 47]]	?	9 877	<b>10 339</b>
DSJC500.9	500	0.9	5	23	15	[[123, 126]]	?	25 581	<b>29 768</b>
DSJC1000.5	1000	0.5	15	12	6	[[73, 82]]	?	33 856	<b>35 808</b>
DSJC1000.9	1000	0.9	6	3	3	[[216, 222]]	?	85 294	<b>100 078</b>
flat300_26_0	300	0.48	12	31	14	26	<b>3 966*</b>	3 901	<b>3 966</b>
flat300_28_0	300	0.48	12	45	6	28	?	3 906	<b>4 099</b>
flat1000_60_0	1000	0.49	17	42	40	60	<b>30 100*</b>	29 914	<b>30 100</b>
flat1000_76_0	1000	0.49	15	21	8	76	?	33 880	<b>35 693</b>

## Références

- [1] E. Kubicka and A. J. Schwenk, “An introduction to chromatic sums,” in *Proceedings of the 17th Conference on ACM Annual Computer Science Conference*, ser. CSC ’89. New York, NY, USA : ACM, 1989, pp. 39–45.
- [2] C. Lecat, C. Lucet, and C.-M. Li, “New Lower Bound for the Minimum Sum Coloring Problem.” in *AAAI*, 2017, pp. 853–859.
- [3] Y. Jin, J.-P. Hamiez, and J.-K. Hao, “Algorithms for the minimum sum coloring problem : a review,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 47, no. 3, pp. 367–394, Mar 2017. [Online]. Available : <https://doi.org/10.1007/s10462-016-9485-7>